PITAGORAS
ACADEMIA

GEOMETRÍA

Profesor:
Marco Almerco

TRIÁNGULOS

TEOREMAS FUNDAMENTALES-CLASIFICACIÓN

TEMA 01: TRIÁNGULOS

DEFINICIÓN Y ELEMENTOS

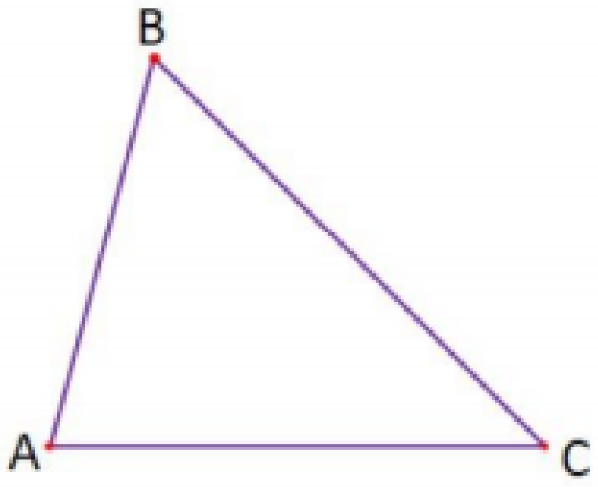
TEOREMAS FUNDAMENTALES Y PROPIEDADES

CLASIFICACIÓN DE LOS TRIÁNGULOS

DESIGUALDADES PITAGÓRICAS

DEFINICIÓN Y ELEMENTOS

Definición.- Si A, B y C son tres puntos no colineales, entonces la unión de los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ se denomina triángulo.



En la figura se muestra el triángulo ABC, y se indica con ΔABC. Los puntos A, B y C se llaman vértices, y los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ se llaman lados.

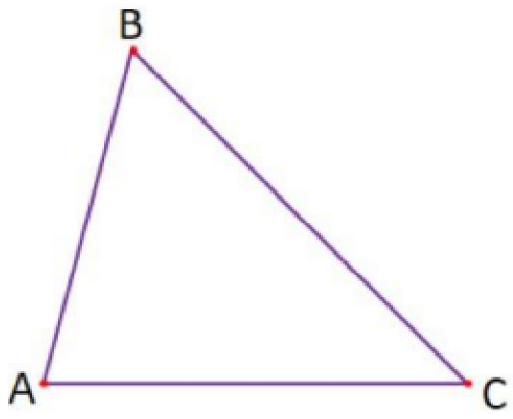
Notación:

Triángulo ABC: ΔABC

$$\Delta ABC = \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{AC} / B \notin \overleftrightarrow{AC}$$

DEFINICIÓN Y ELEMENTOS

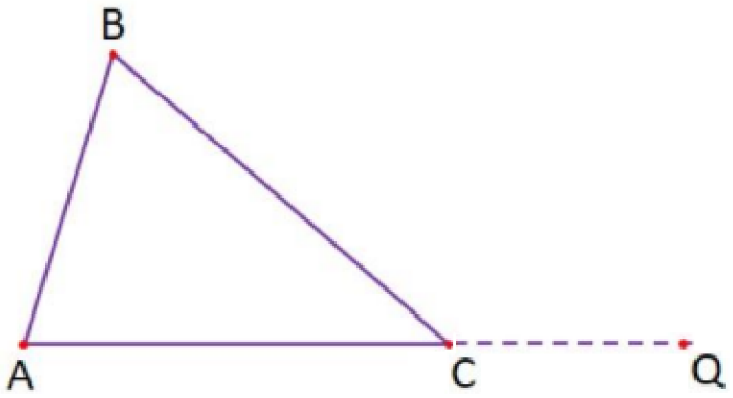
Todo triángulo ABC determina tres ángulos: ∠BAC, ∠ABC y ∠ACB, a éstos los llamamos los ángulos del triángulo ABC (o ángulos internos).



En la figura:

Los ángulos internos del triángulo ABC son:
∠BAC, ∠ABC y ∠BCA

Definición: Un ángulo externo de un triángulo es el ángulo adyacente y suplementario de un ángulo del triángulo, es decir es cada uno de los ángulos que determina un par lineal con un ángulo interno del triángulo.



En la figura:

Un ángulo externo del triángulo ABC es: ∠BCQ

DEFINICIÓN Y ELEMENTOS

Nota:

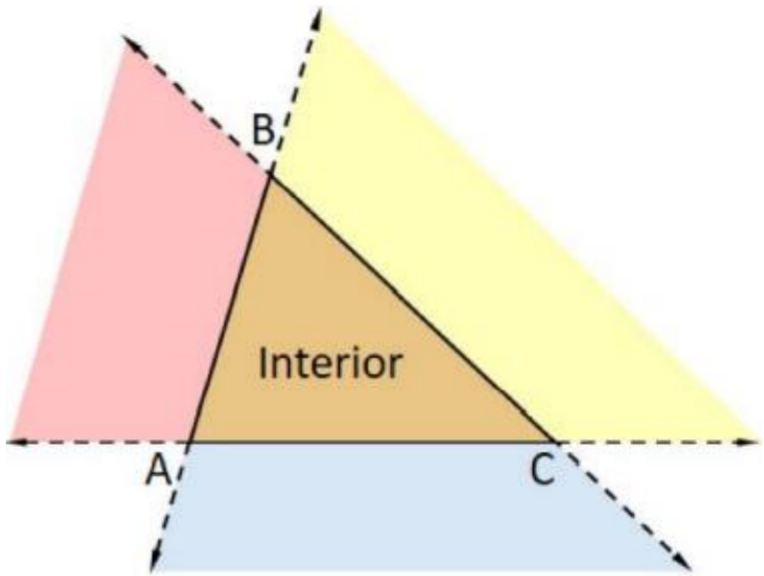
La siguiente expresión $A - B - C$, significa:

a) Los puntos A, B y C son colineales, y

b) B está entre A y C.

Interior de un triángulo

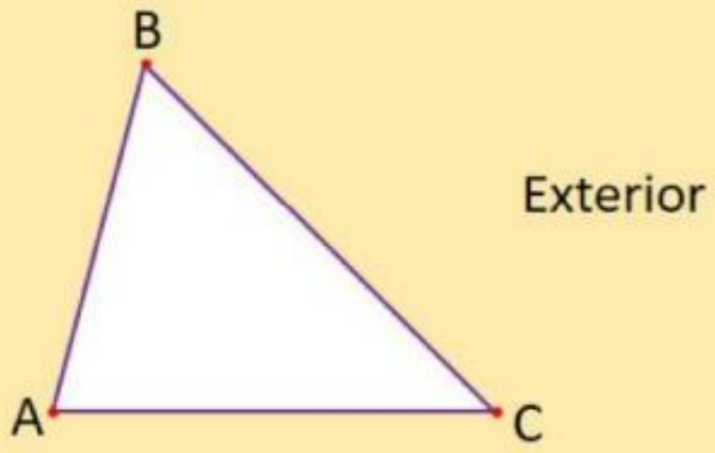
Un punto está en el interior de un triángulo, si está en el interior de cada uno de los ángulos del triángulo.



DEFINICIÓN Y ELEMENTOS

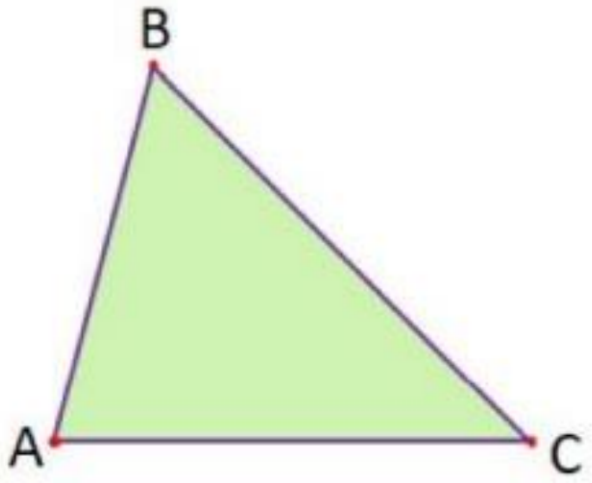
Exterior de un triángulo

El exterior de un triángulo es el conjunto de todos los puntos que no están ni en el triángulo ni en su interior.



Región triangular

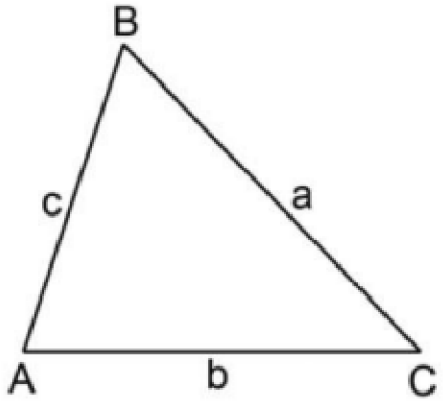
Definición.- La unión de un triángulo y el interior del triángulo se denomina región triangular.



DEFINICIÓN Y ELEMENTOS

Perímetro: 2p

Se llama perímetro de un triángulo a la suma de las medidas de sus lados.



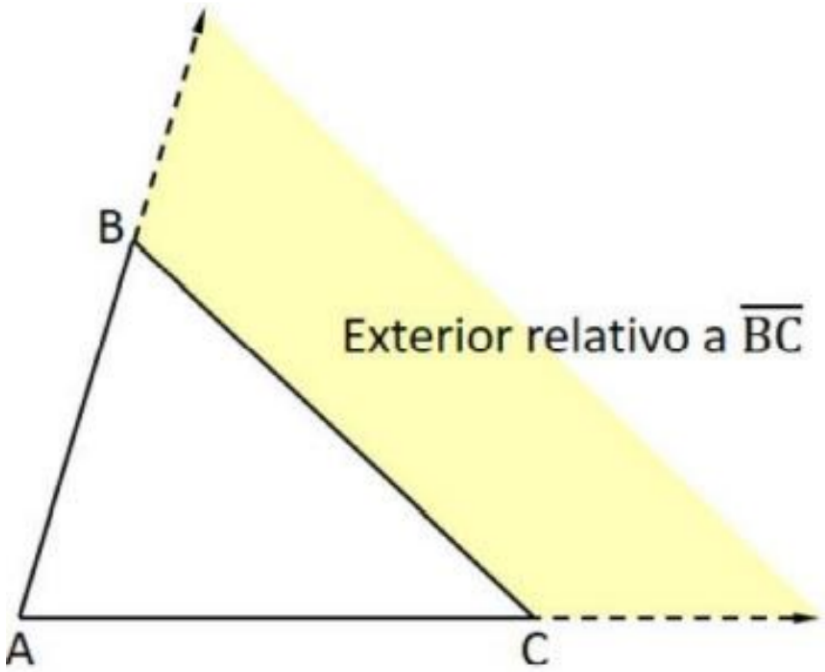
$$2p = AB + BC + AC$$

$$2p = a + b + c$$

$$p = \frac{a + b + c}{2}$$

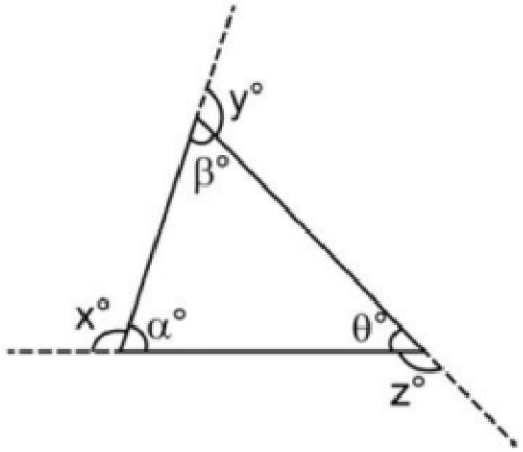
Observación:

La región sombreada corresponde al exterior del triángulo relativo a $\overline{BC}$.



TEOREMAS FUNDAMENTALES

TEOREMAS

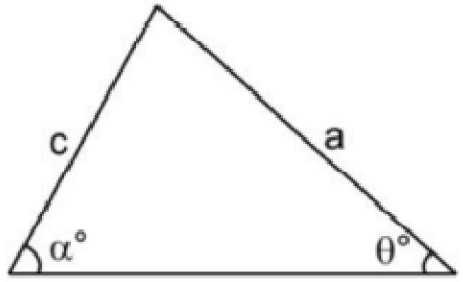


1) $\alpha + \beta + \theta = 180$

2) $\beta + \theta = x$

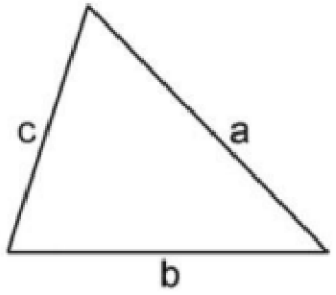
3) $x + y + z = 360$

4) Teorema de correspondencia



$\alpha > \theta \leftrightarrow a > c$

5) Desigualdad triangular



$a < b + c$

$b < c + a$

$c < a + b$

$|a - c| < b < a + c$

(Teorema de existencia)

Consecuencia

En todo triángulo, cualquiera de sus lados siempre es menor que el semiperímetro.

EJEMPLO

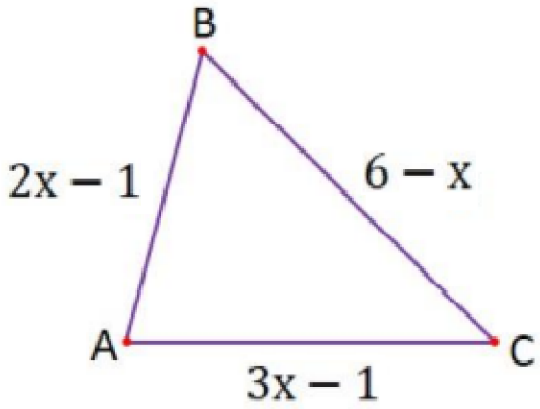
Ejemplo

En un triángulo ABC: AB=2x-1, BC=6-x y AC=3x-1. Si x es un número entero, calcular el valor de x.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

Resolución:

Se pide: x ($x \in Z$)



Por desigualdad triangular:

$$(3x-1)-(2x-1) < 6-x < 3x-1+2x-1$$

$$x < 6-x < 5x-2$$

$$x < 6-x \quad y \quad 6-x < 5x-2$$

$$2x < 6 \quad y \quad 8 < 6x$$

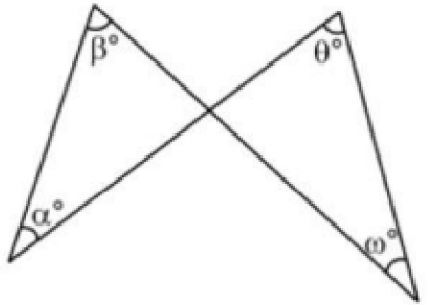
$$x < 3 \quad y \quad 1{,}33\ldots < x$$

$$1{,}33\ldots < x < 3$$

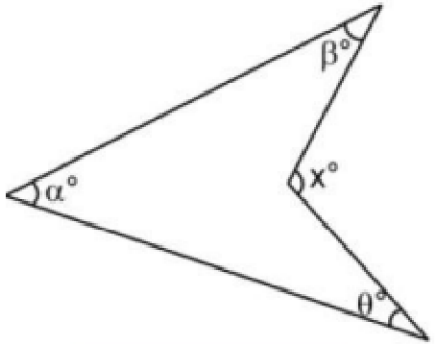
$$\therefore x = 2$$

TEOREMAS FUNDAMENTALES

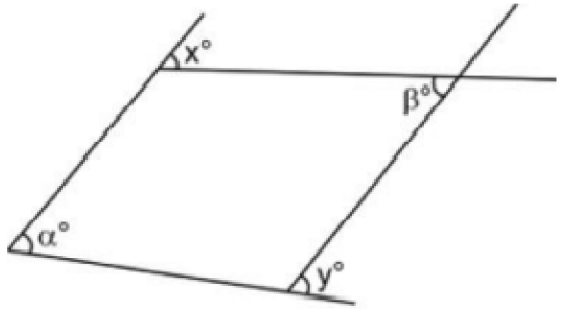
PROPIEDADES



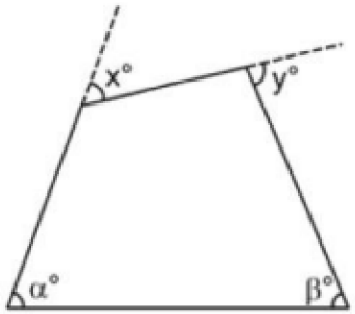
$$\alpha + \beta = \theta + \omega$$



$$x = \alpha + \beta + \theta$$

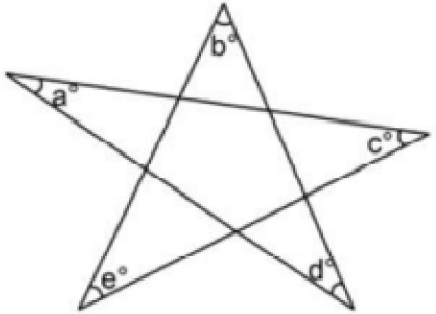


$$\alpha + \beta = x + y$$

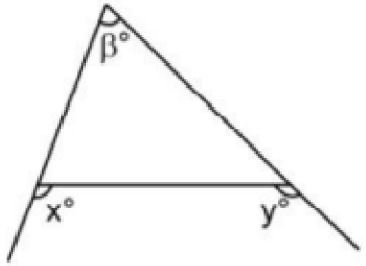


$$\alpha + \beta = x + y$$

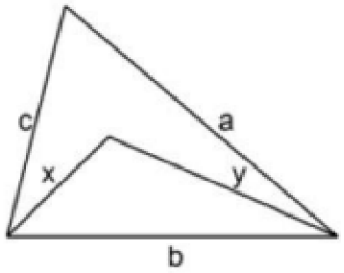
TEOREMAS FUNDAMENTALES



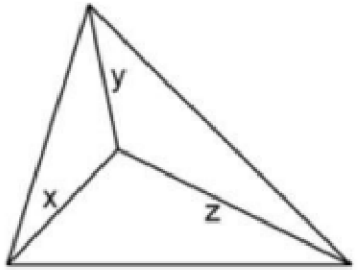
$$a + b + c + d + e = 180$$



$$x + y = 180 + \beta$$



$$b < x + y < c + a$$



Sea 2p el perímetro del triángulo, entonces:

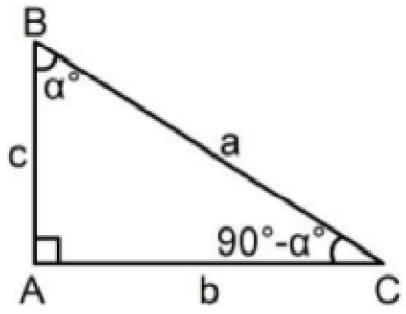
$$p < x + y + z < 2p$$

CLASIFICACIÓN DE LOS TRIÁNGULOS

1) Según las medidas de sus ángulos

a) Triángulo rectángulo

Es aquel que tiene un ángulo recto, los lados que lo forman se llaman catetos y el que se le opone recibe el nombre de hipotenusa.



$\overline{AB}$ y $\overline{AC}$: Catetos

$\overline{BC}$: Hipotenusa

$$a^2 = b^2 + c^2$$

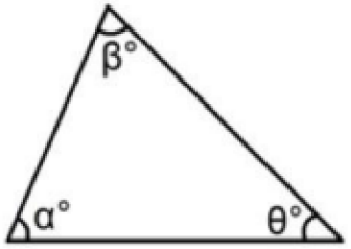
Teorema de Pitágoras

b) Triángulo oblicuángulo

Es aquel que no tiene ángulo recto. Puede ser:

1) Triángulo acutángulo

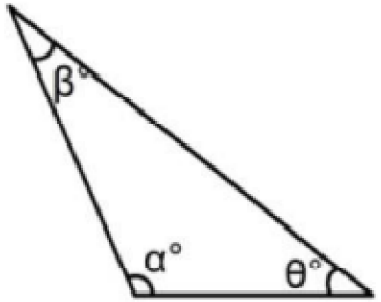
Es el que tiene sus 3 ángulos agudos.



$$0 < \alpha < 90$$
$$0 < \beta < 90$$
$$0 < \theta < 90$$

2) Triángulo obtusángulo

Es el que tiene uno de sus ángulos obtuso. Los dos ángulos restantes serán agudos.



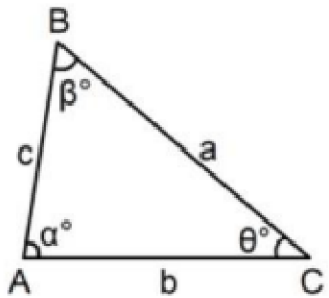
$$90 < \alpha < 180$$
$$0 < \beta < 90$$
$$0 < \theta < 90$$

CLASIFICACIÓN DE LOS TRIÁNGULOS

2) Según las medidas de sus lados

a) Triángulo escaleno

Es aquel que tiene sus lados diferentes. Sus ángulos también tienen medidas diferentes.



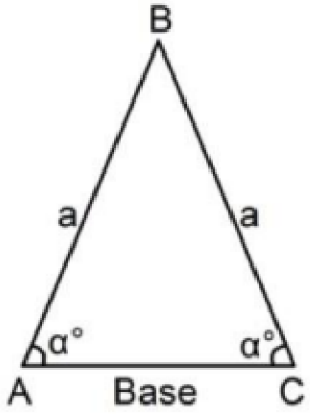
$a \neq b$

$b \neq c$

$c \neq a$

b) Triángulo isósceles

Es aquel que tiene dos lados congruentes, además los ángulos opuestos a dichos lados también son congruentes. Al lado desigual se le denomina base y al ángulo desigual ángulo en el vértice.

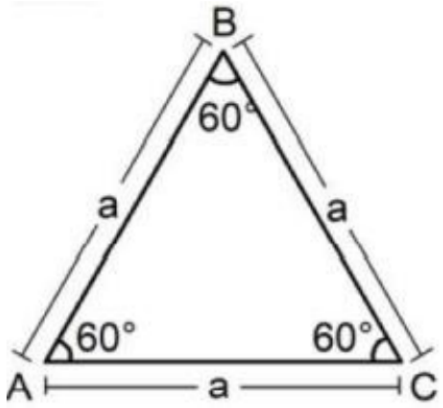


$AB = BC$

$0 < \alpha < 90$

c) Triángulo equilátero

Es aquel que tiene sus tres lados congruentes; sus ángulos también son congruentes y miden 60 cada uno.



$AB = BC = AC$

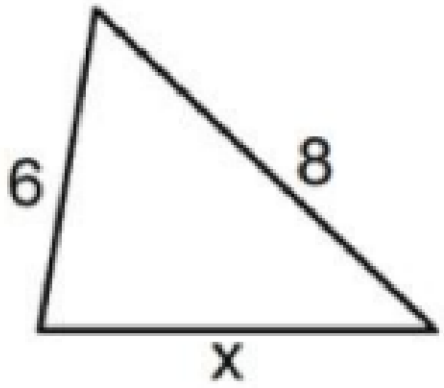
EJEMPLO

EJEMPLO

Dos lados de un triángulo miden 6 y 8. Si el triángulo es escaleno, ¿cuántos valores enteros puede tomar la medida del tercer lado?

RESOLUCIÓN:

Dato: el triángulo es escaleno



Puesto que el triángulo es escaleno:

$$x \neq 6 \text{ y } x \neq 8.$$

Por desigualdad triangular:

$$8 - 6 < x < 8 + 6$$

$$2 < x < 14$$

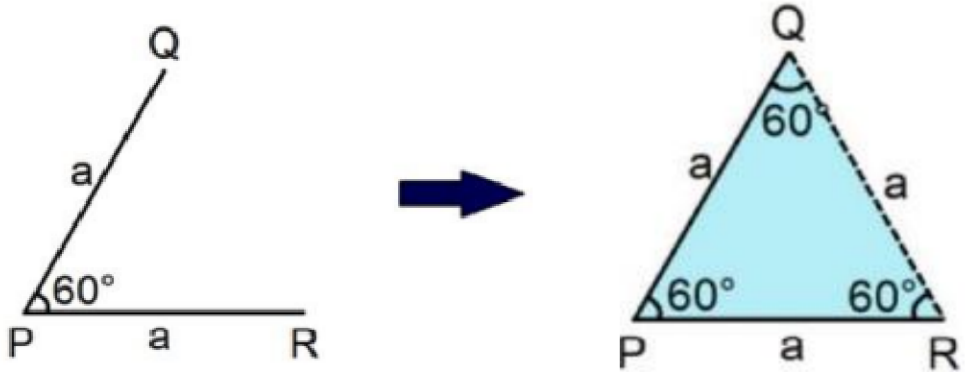
Entonces: $x = 3; 4; 5; \cancel{6}; 7; \cancel{8}; 9; 10; 11; 12 \text{ o } 13$

$\therefore$ x puede tomar sólo 9 valores enteros.

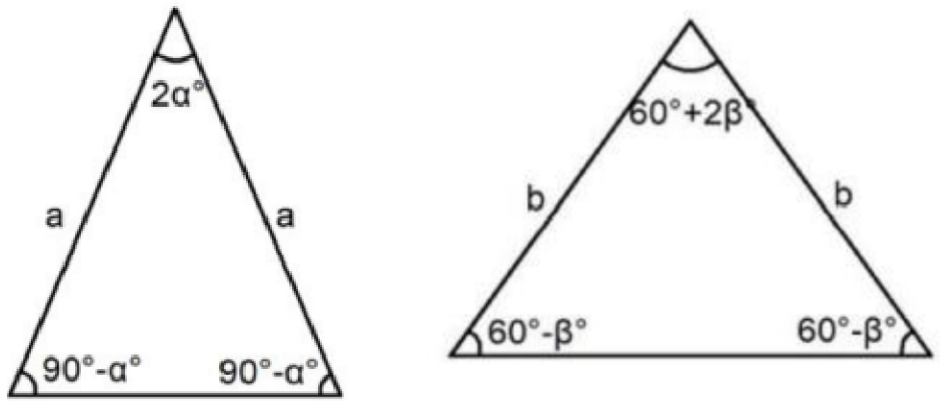
CLASIFICACIÓN DE LOS TRIÁNGULOS

Observaciones

Si PQ=PR y m∠QPR=60, se recomienda unir los puntos Q y R para formar un triángulo equilátero



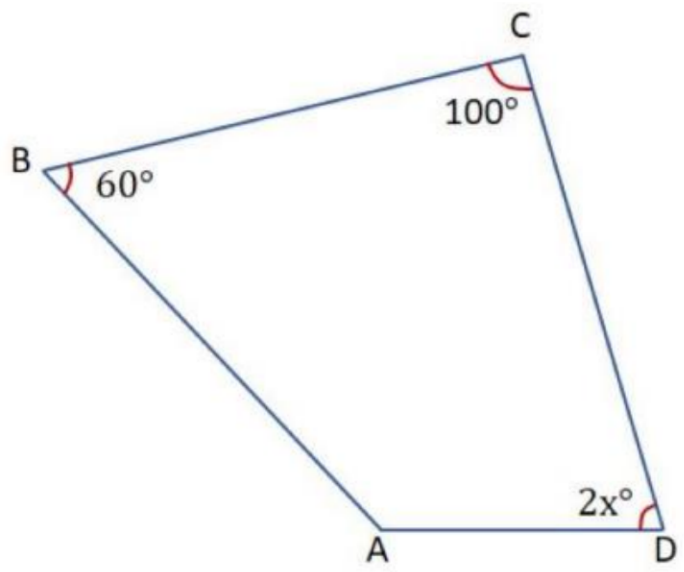
Éstas son algunas de las formas que presentan las medidas de los ángulos de un triángulo isósceles, conviene recordarlas para reconocerlos en un problema.



EJEMPLO

EJEMPLO

Si AB=BC=CD; calcular el valor de x.



A) 25 B) 35 C) 45
D) 55 E) 65

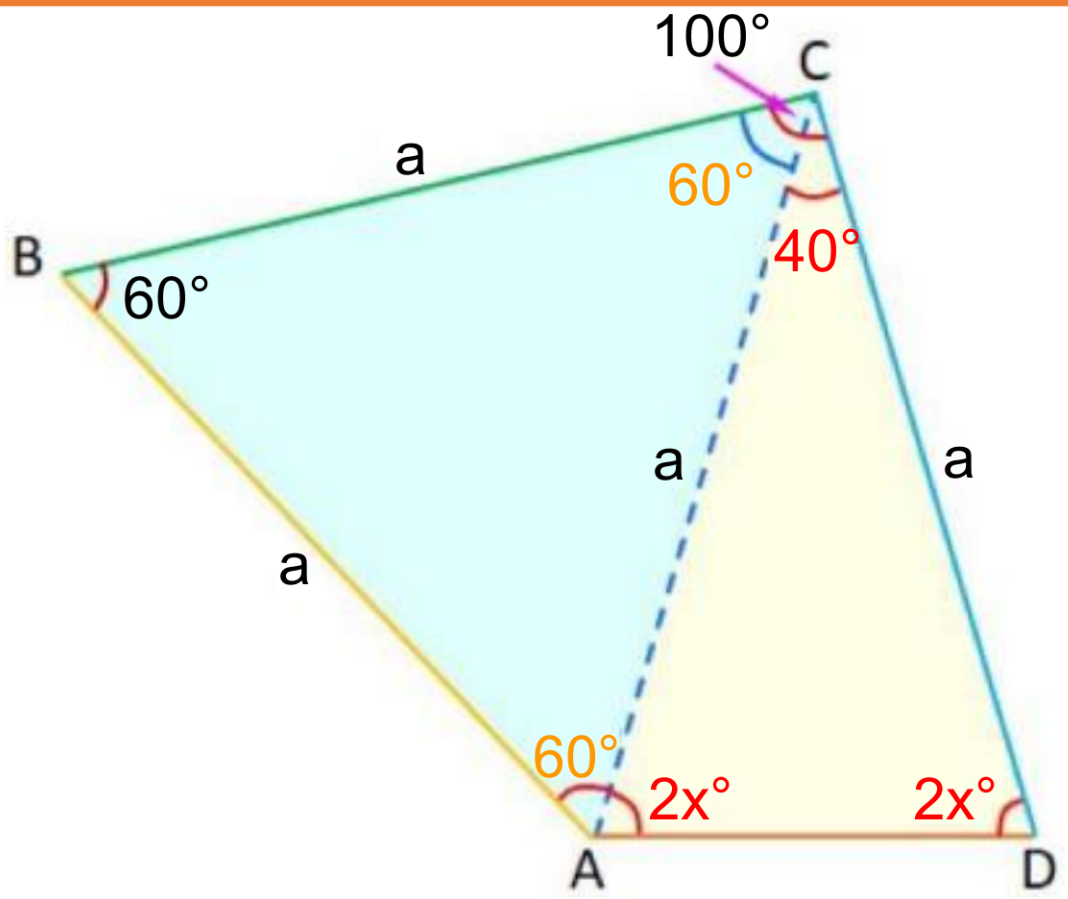
RESOLUCIÓN:

Se pide: $x = ?$

Se traza $\overline{CA}$ para formar el triángulo equilátero ABC, de donde se obtiene:

$$AC = a,\ m\angle BAC = 60 \text{ y } m\angle BCA = 60$$

En C: $m\angle ACD = 40$



Ahora se observa que el triángulo ACD es isósceles, entonces: $m\angle CAD = 2x$

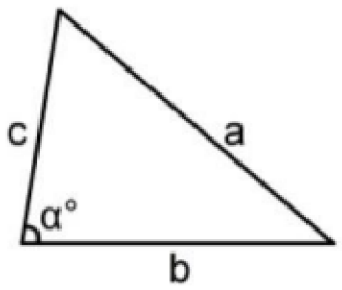
Finalmente en el triángulo ACD:

$$2x + 40 + 2x = 180$$

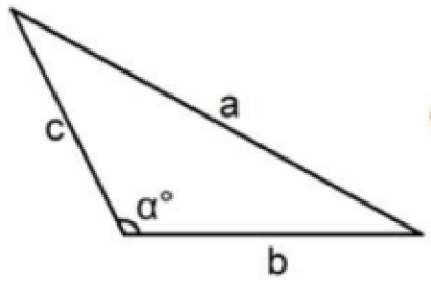
$$\therefore x = 35$$

CLASIFICACIÓN DE LOS TRIÁNGULOS

Desigualdades pitagóricas



$$\alpha < 90 \leftrightarrow a^2 < b^2 + c^2$$



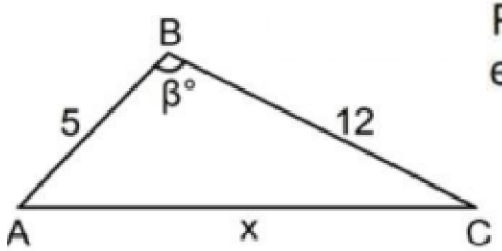
$$\alpha > 90 \leftrightarrow a^2 > b^2 + c^2$$

Ejemplo

En el triángulo ABC: AB=5 y BC=12. Si el ángulo B es obtuso, ¿cuántos valores enteros puede tomar AC?

Resolución:

Se pide el número de valores enteros que puede tomar x. Dato: β>90



Por desigualdad triangular en el triángulo ABC:

$$12 - 5 < x < 12 + 5$$

$$7 < x < 17 \ \ldots (1)$$

Por dato el ángulo B es obtuso, lo que sugiere utilizar la desigualdad pitagórica, es decir:

$$\beta > 90 \leftrightarrow x^2 > 5^2 + 12^2$$

$$x^2 > 169$$

$$x > 13 \ \ldots (2)$$

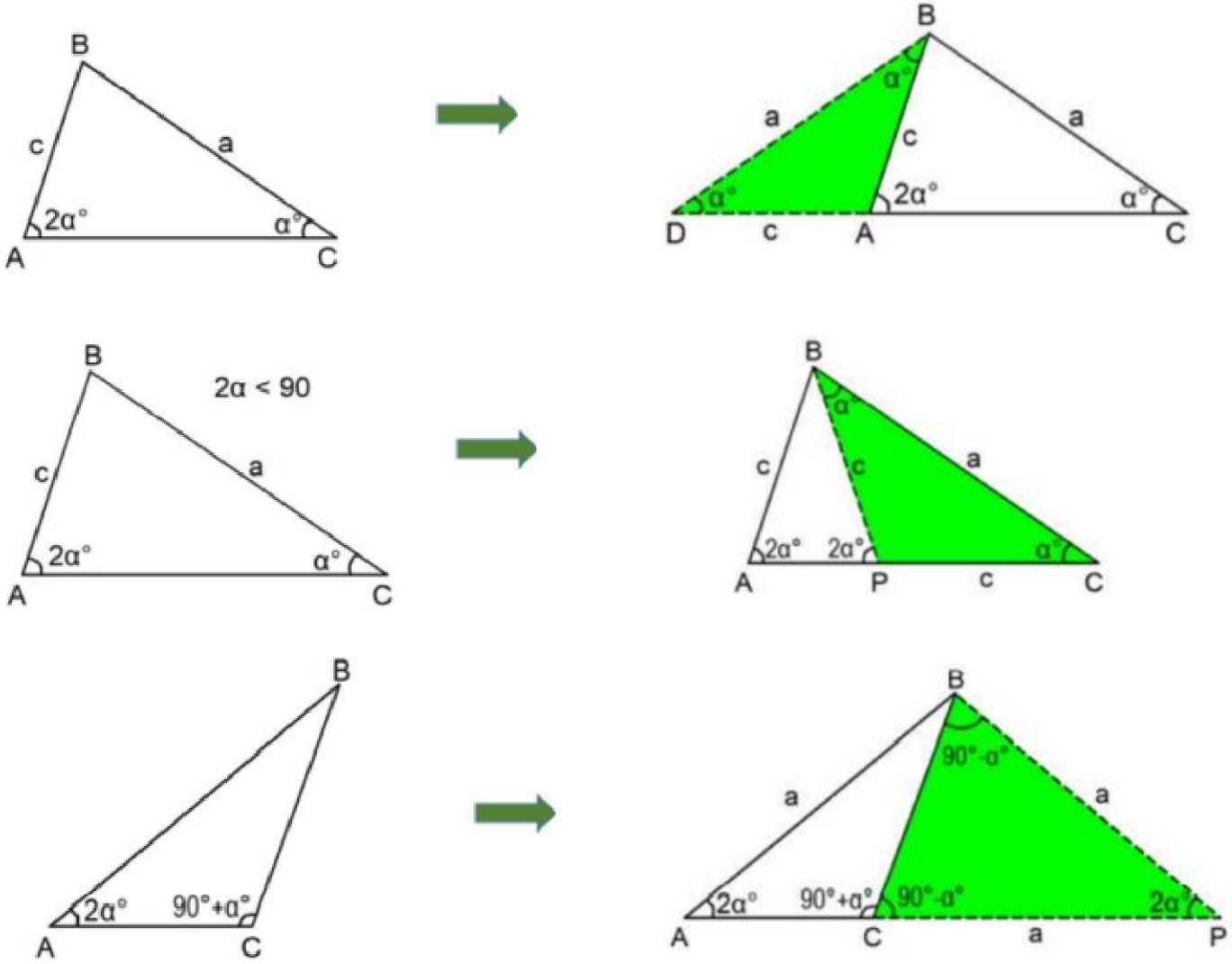
Finalmente de (1) y (2), tendremos:

$$13 < x < 17$$

$\therefore$ x puede tomar 3 valores enteros

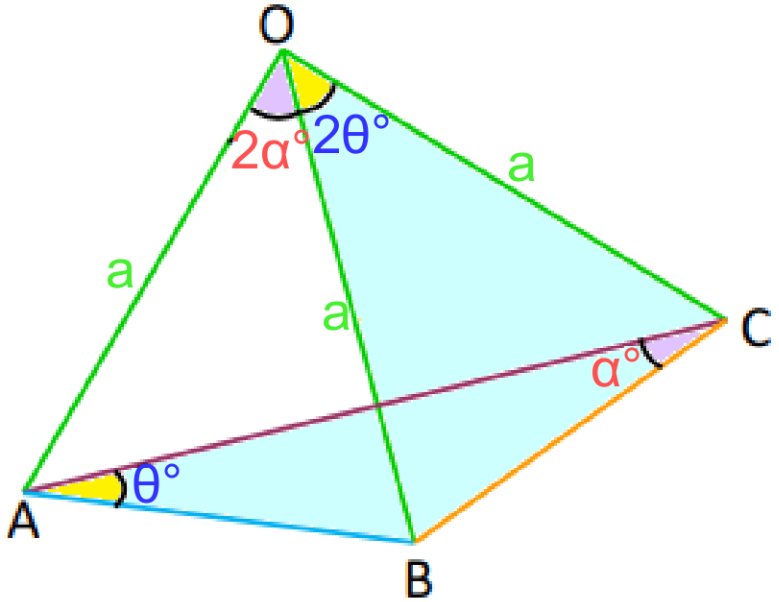
CLASIFICACIÓN DE LOS TRIÁNGULOS

Trazos auxiliares



Propiedad:

Si: AO = OB = OC = a



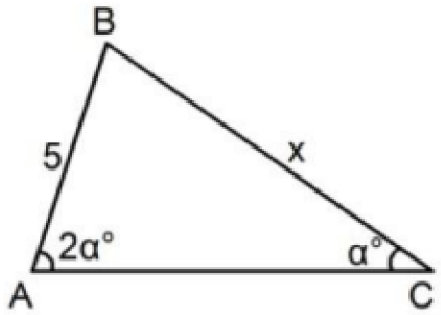
$$m\angle CAB = \frac{m\angle BOC}{2}$$

EJEMPLO

Ejemplo

En el triángulo ABC: m∠A=2(m∠C) y AB=5. ¿Cuántos valores enteros puede tomar BC?

Resolución:



Se pide el número de valores enteros que puede tomar BC=x.

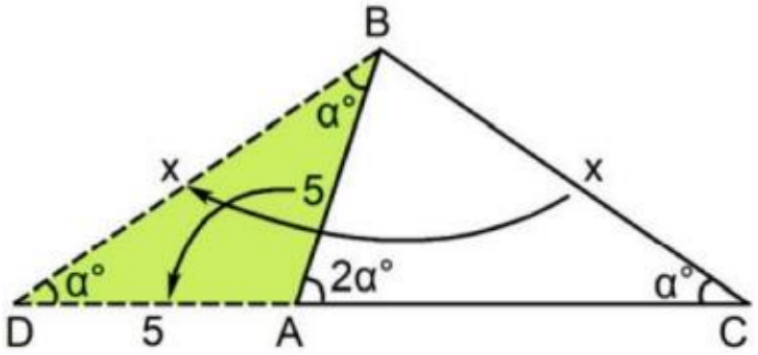
Recordemos que en todo triángulo a mayor ángulo se le opone el mayor lado. En el triángulo ABC se tiene que el ángulo A mide el doble del ángulo C, es decir el ángulo A es mayor que el ángulo C, luego:

$$x > 5 \ \ldots \ (1)$$

Ahora podemos realizar el trazo que se recomienda en esta situación:

Trazamos $\overline{BD}$ tal que m∠ABD=α, de donde resulta:

m∠ADB=α → AB=AD=5 y BC=BD=x



Ahora en el triángulo DAB: $x < 5 + 5$

$$x < 10 \ \ldots \ (2)$$

Finalmente de (1) y (2): $5 < x < 10$

Por lo tanto x puede tomar 4 valores enteros.

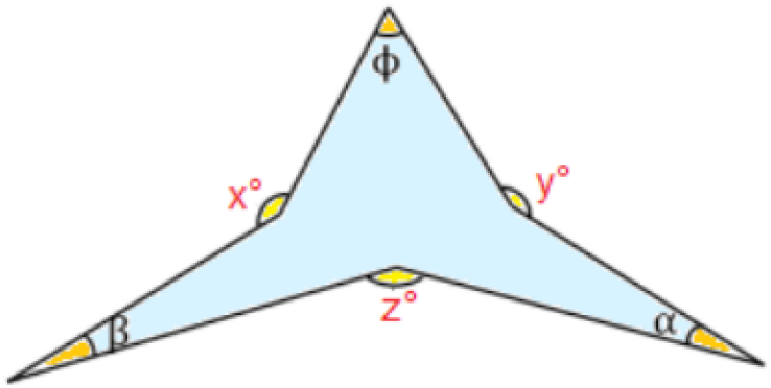
TRIÁNGULOS

MOMENTO DE PRACTICAR

PROBLEMAS Y RESOLUCIÓN

EJERCICIO

01. En el siguiente gráfico, si α+ϕ+β=91. Calcular el valor de x+y+z.



A) 432
B) 451
C) 449
D) 451
E) 517

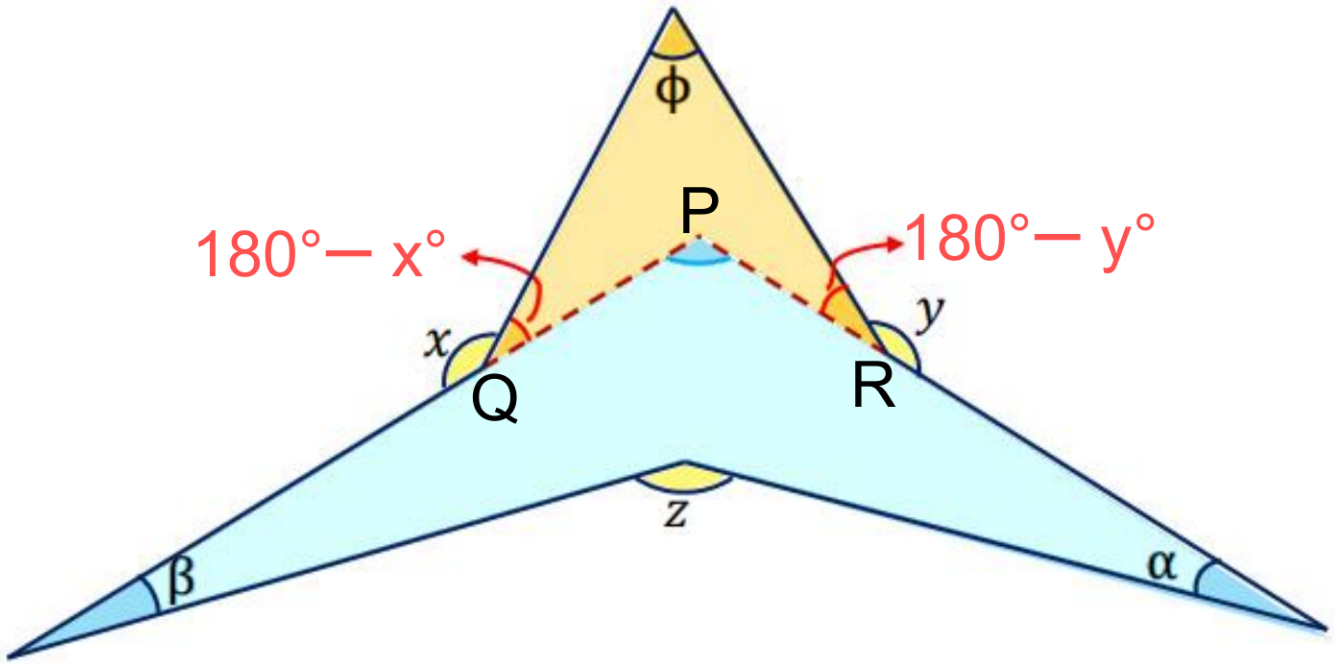
Resolución:

Nos piden: x + y + z

Por dato: $\alpha + \phi + \beta = 91$

Por "Boomerang"

$$m\angle P = 360 - x - y + \phi$$



Por "Boomerang"

$$\beta + 360 - x - y + \phi + \alpha = z$$

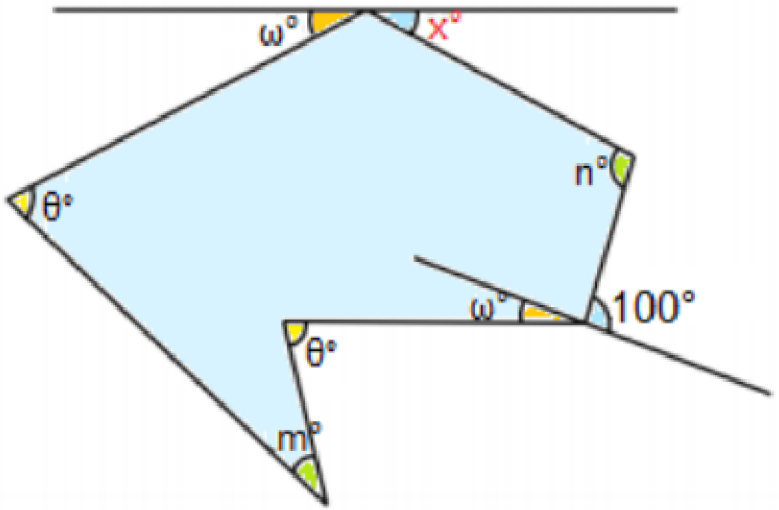
$$360 + \underbrace{\phi + \alpha + \beta}_{91} = x + y + z$$

$$360 + 91 = x + y + z$$

$$\therefore x + y + z = 451$$

EJERCICIO

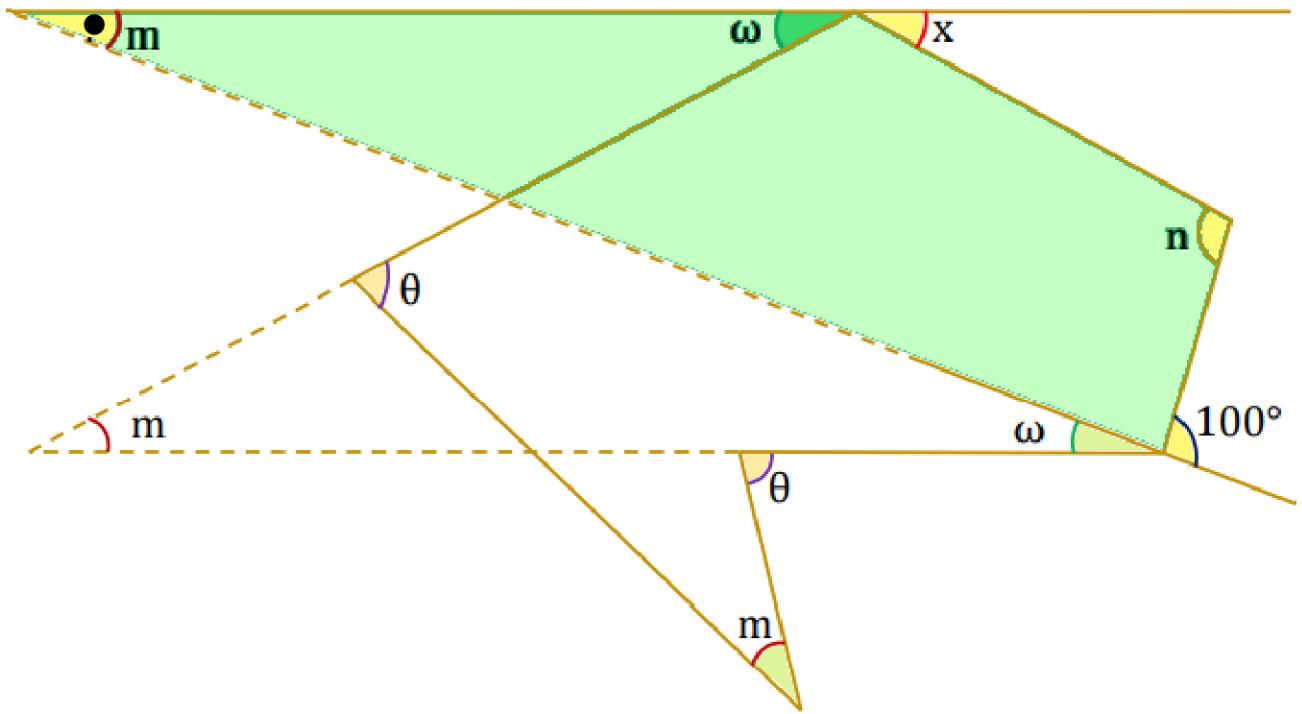
02. En el gráfico, si m+n=130, calcule el valor de x.



A) 30
B) 45
C) 26,5
D) 18,5
E) 37

Resolución:

$$\text{Dato: } m + n = 130$$



Por pescado:

$$\underbrace{m + n}_{130} = 100 + x$$

$$130 = 100 + x$$

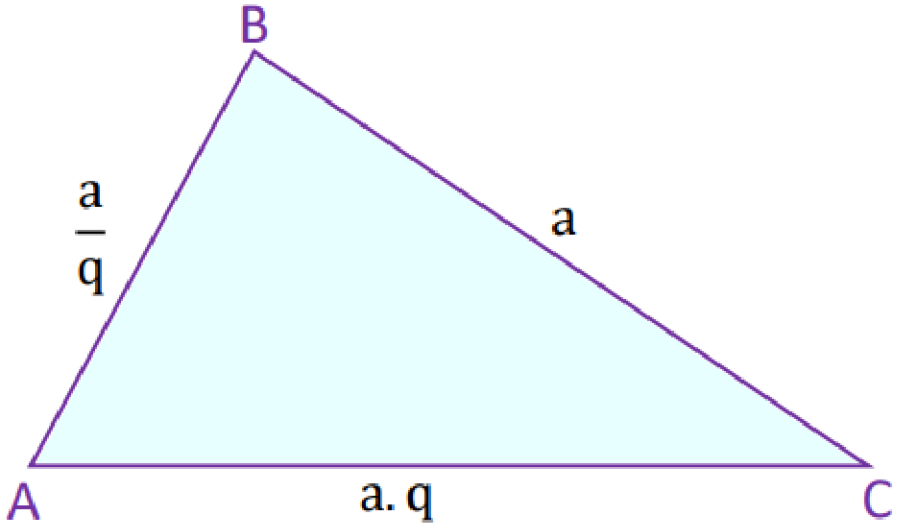
$$\therefore \quad x = 30$$

EJERCICIO

03. La longitud de los lados de un triángulo forma una progresión geométrica de razón q>1, entonces q toma los valores:

A) $q>(1+\sqrt{5})/2$
B) $(1-\sqrt{5})/2<q<(1+\sqrt{5})/2$
C) $1<q<(1+\sqrt{5})/2$
D) $(1+\sqrt{5})/2<q<(1+\sqrt{6})/2$
E) $(1+\sqrt{6})/2<q<(1+\sqrt{7})/2$ (UNI 2010–II)

Resolución:



Sea "q" la razón geométrica y "a" la longitud del lado intermedio, entonces, los lados serán:

$$AB = \frac{a}{q}\ ;\ \ BC = a \ \ y \ \ AC = a.q$$

Por T. de existencia:

$$aq < \frac{a}{q} + a \ \rightarrow \ q^2 - q - 1 < 0$$

Completando cuadrados

$$\left(q - \frac{1}{2}\right)^2 < \frac{5}{4}$$

$$-\frac{\sqrt{5}}{2} < q - \frac{1}{2} < \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2} < q < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Pero, según el dato, $q > 1$

$$\therefore 1 < q < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

EJERCICIO

04. En un triángulo ABC, m∠BAC=4 en los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ se ubican los puntos P y Q respectivamente, las prolongaciones de $\overline{AC}$ y $\overline{PQ}$ se intersecan en M. Si AP=CM=QM, entonces el valor entero de m∠ABC es:

A) 84
B) 85
C) 86
D) 87
E) 88

Resolución:

Piden: x_{entero}

ΔCQM: isósceles: $m\angle BCM = 4 + x$

$$m\angle CQM = 4 + x \ \wedge \ m\angle QMC = 172 - 2x$$

$$\rightarrow 4 + x < 90$$

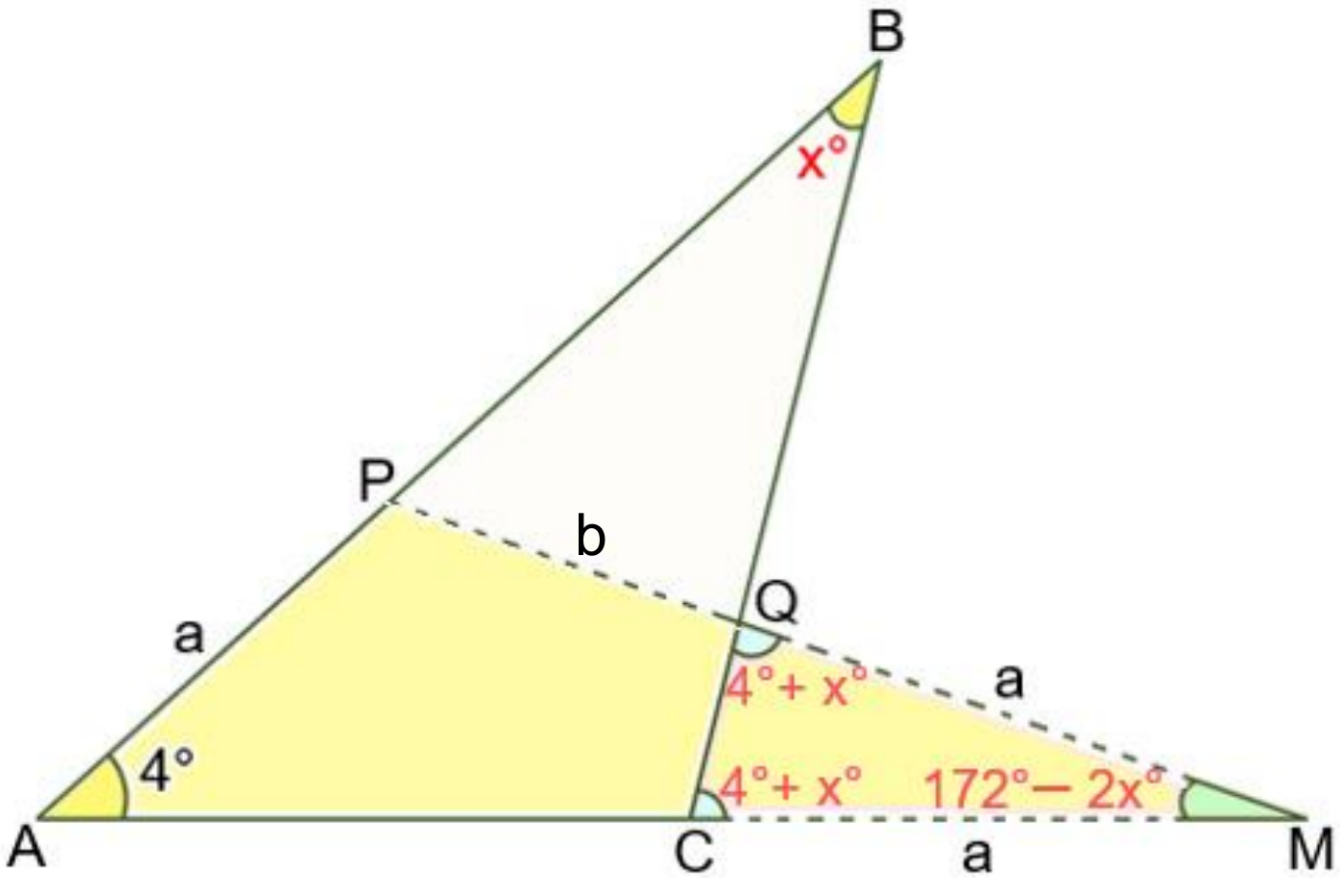
$$x < 86 \quad \ldots (1)$$

ΔAPM: T. de correspondencia.

$$4 > 172 - 2x$$

$$2x > 168$$

$$x > 84 \quad \ldots (2)$$



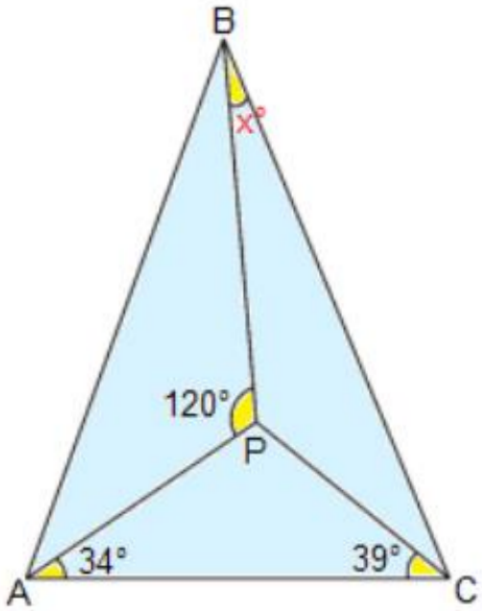
De (1) y (2)

$$84 < x < 86$$

$$\therefore \ x_{entero} = 85$$

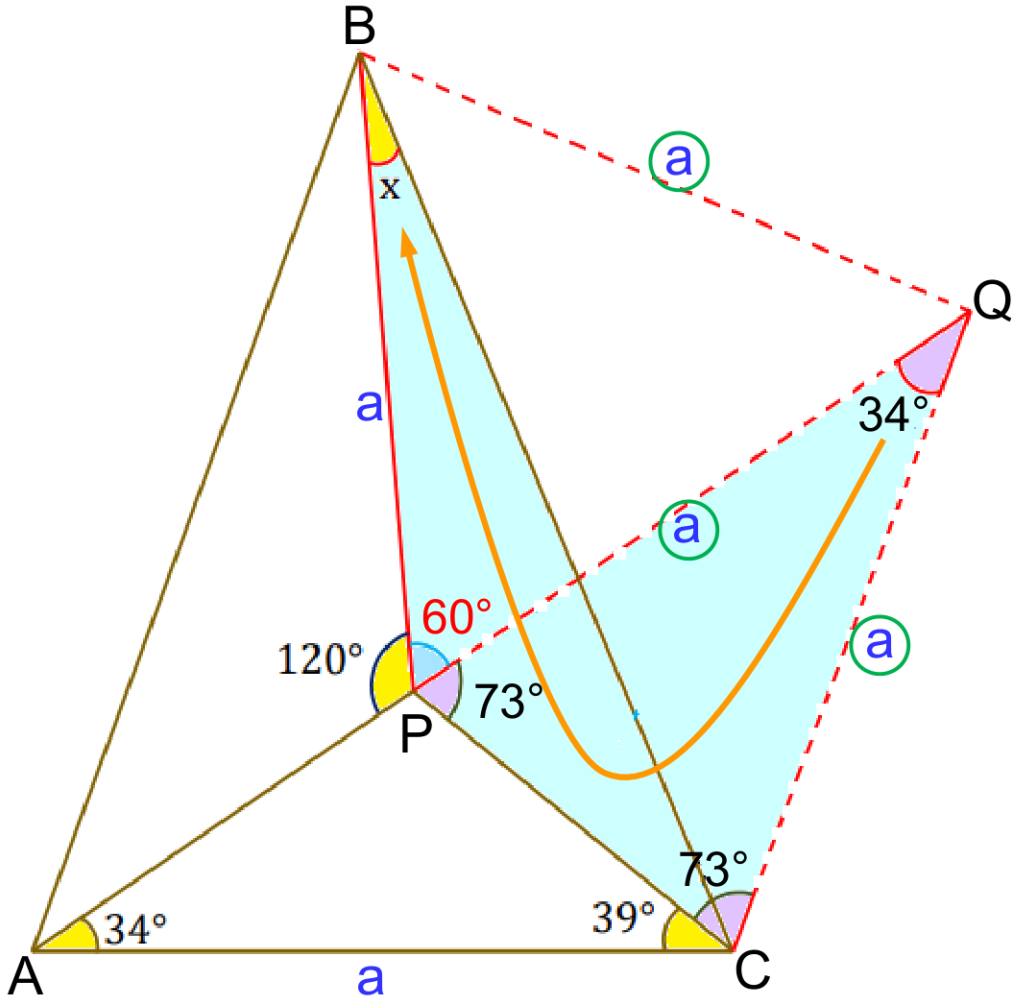
EJERCICIO

05. En el gráfico: AC=BP; calcular el valor de x.



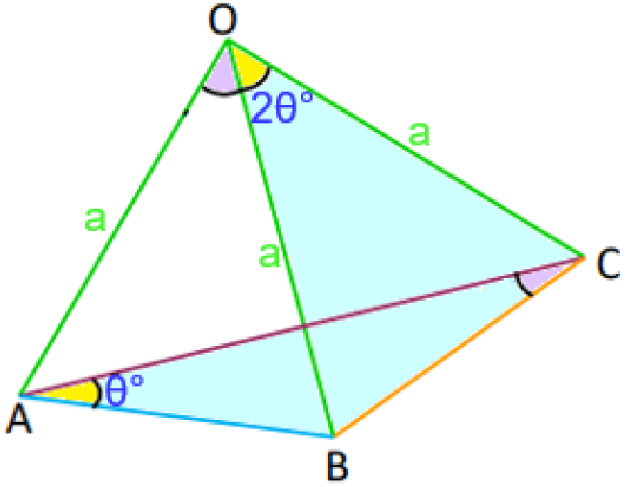
A) 14
B) 17
C) 23
D) 34
E) 26

Resolución:



Por T. del trípode:

Si: AO = OB = OC = a



$$m\angle CAB = \frac{m\angle BOC}{2}$$

$$x = \frac{34}{2}$$

$$\therefore x = 17$$

EJERCICIO

06. En un triángulo ABC, exterior y relativo al lado $\overline{BC}$ se ubica el punto P; en $\overline{AB}$ y $\overline{CP}$ se ubica los puntos N y D (A–N–D) tal que $\overline{QN} \cap \overline{BC}=\{E\}$. Si: m∠ABC=m∠QMD, m∠NQM=m∠APC y m∠AFN=m∠DEC=θ, entonces la m∠BAC+m∠ACP es:

A) θ/2
B) θ
C) 3θ/2
D) 2θ
E) 3θ

Resolución:

Piden $x + y$

Dato: $a + b = \theta$

Por "corbata"

$$a + \alpha = \alpha + m\angle QMP \rightarrow m\angle QMP = a$$

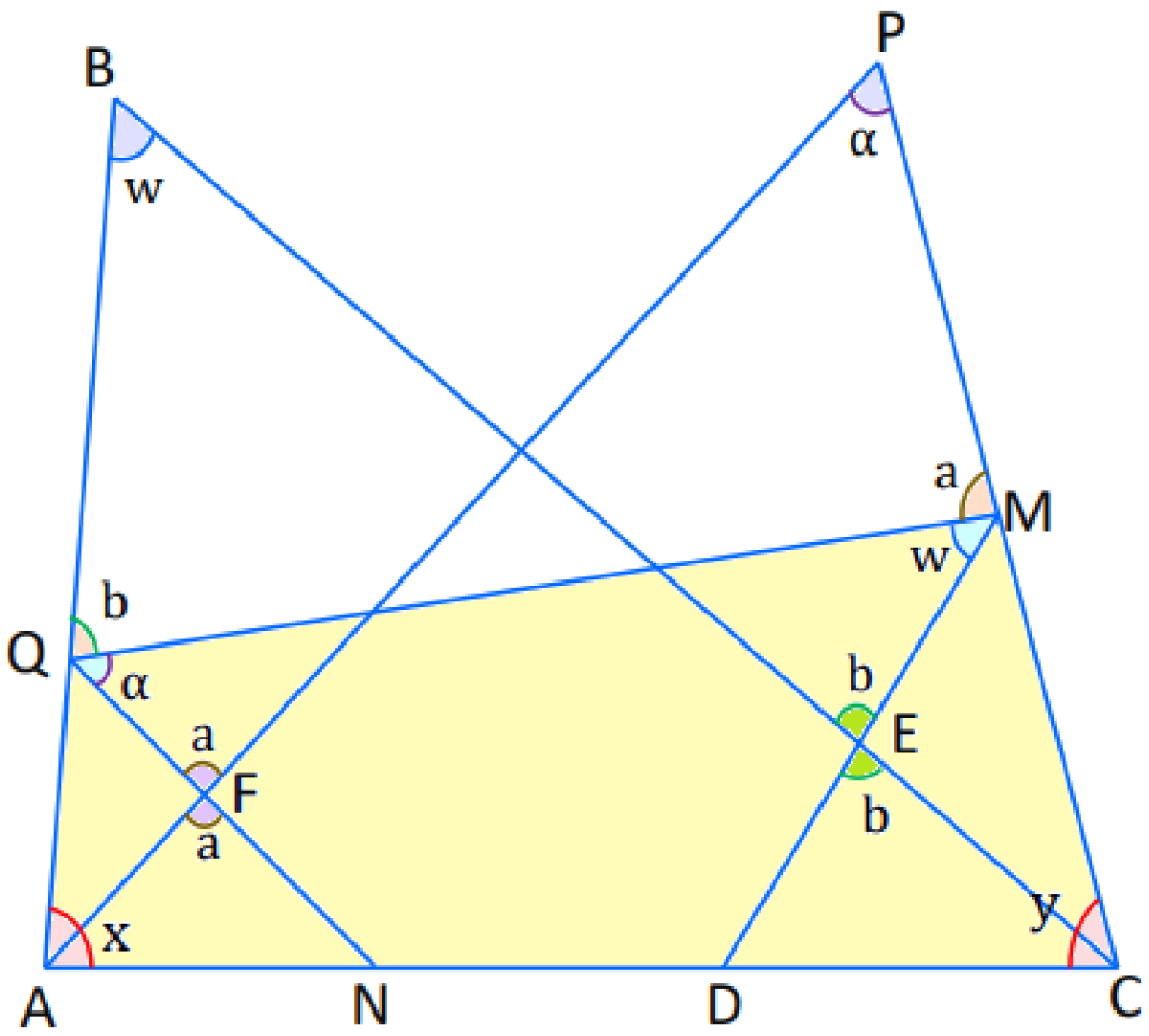
Por "corbata"

$$b + w = w + m\angle BQM \rightarrow m\angle BQM = b$$

Luego:

Por " Cartera" $\quad x + y = a + b$

$$\therefore x + y = \theta$$



EJERCICIO

07. En un triángulo ABC se trazan las bisectrices interiores $\overline{AN}$ y $\overline{CM}$ (N en $\overline{BC}$; M en $\overline{AB}$); tal que m∠BMN=m∠CMA y m∠MNB=m∠ANC. Calcular m∠ABC.

A) 60
B) 75
C) 90
D) 80
E) 36

Resolución:

Se pide: $m\angle ABC = x$

En el cuadrilátero AMNC:

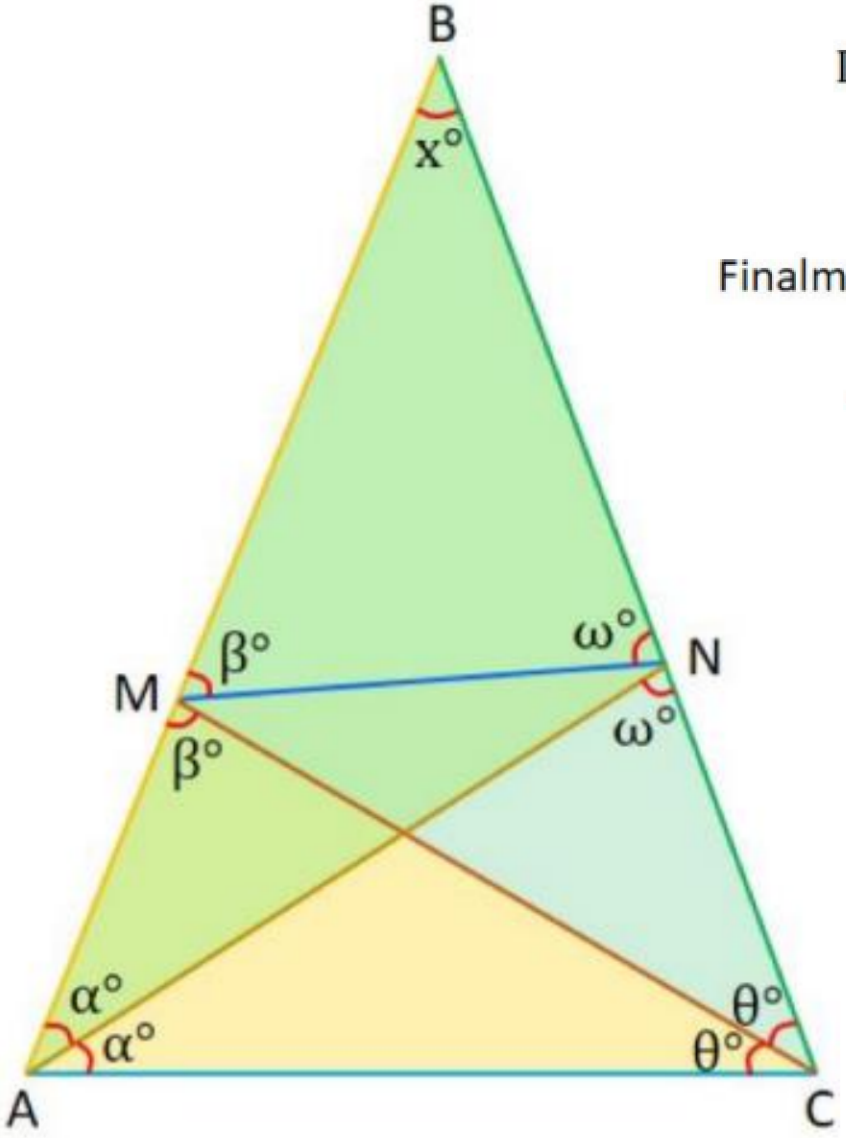
$$2\alpha + 2\theta = \beta + \omega \quad \ldots(1)$$

Por ángulo exterior:

ΔANB: $\omega = \alpha + x$

ΔBMC: $\beta = x + \theta$

Sumando: $\omega + \beta = \alpha + \theta + 2x \quad \ldots(2)$



De (1) y (2):

$$\alpha + \theta = 2x$$

Finalmente en el triángulo ABC:

$$\underbrace{2\alpha + 2\theta}_{2(2x)} + x = 180$$

$$\therefore x = 36$$

EJERCICIO

08. En un triángulo ABC: m∠A=3(m∠C). Si AB=4 y el ángulo BAC es obtuso, calcular el mayor valor entero de $\overline{BC}$.

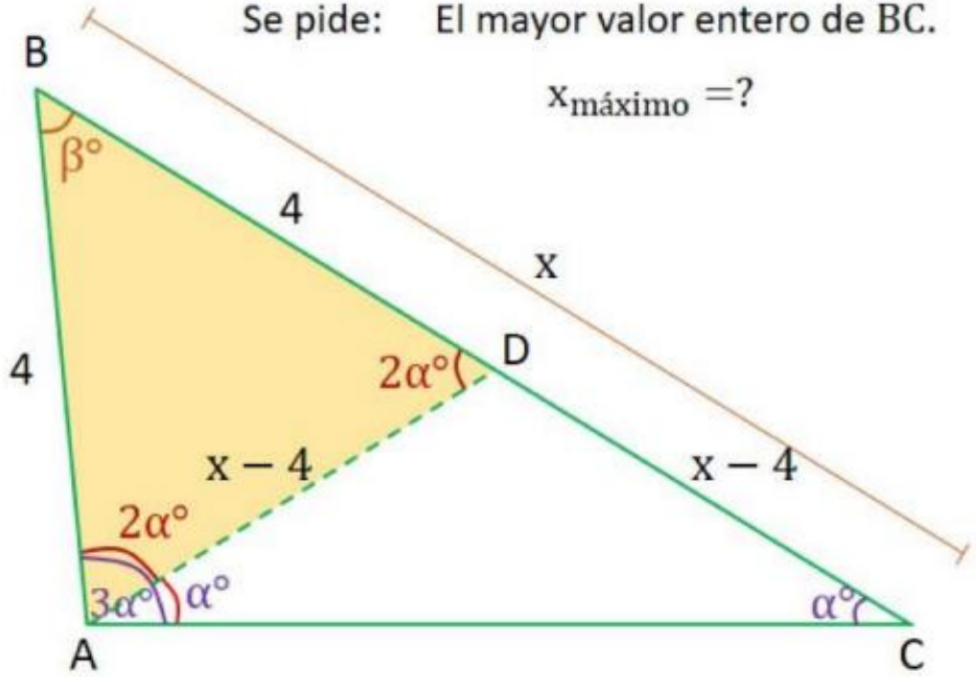
A) 11
B) 10
C) 9
D) 8
E) 7

Resolución:

Dato: El ángulo BAC es obtuso

Se pide: El mayor valor entero de $\overline{BC}$.

$x_{máximo} = ?$



Se traza $\overline{AD}$, tal que: $m\angle DAC = \alpha$

Luego: $m\angle BAD = 2\alpha$, $m\angle BDA = 2\alpha$,

$AB = BD = 4$ (ΔABD: isósc) y

$DC = x - 4 = AD$

En ΔABD, por desigualdad triangular:

$$4 - 4 < x - 4 < 4 + 4$$

$$4 < x < 12 \quad \ldots (1)$$

Por dato: $3\alpha > 90 \quad \rightarrow 2\alpha > 60$

En el triángulo ABD: $\beta < 60$

Luego: $x - 4 < 4$

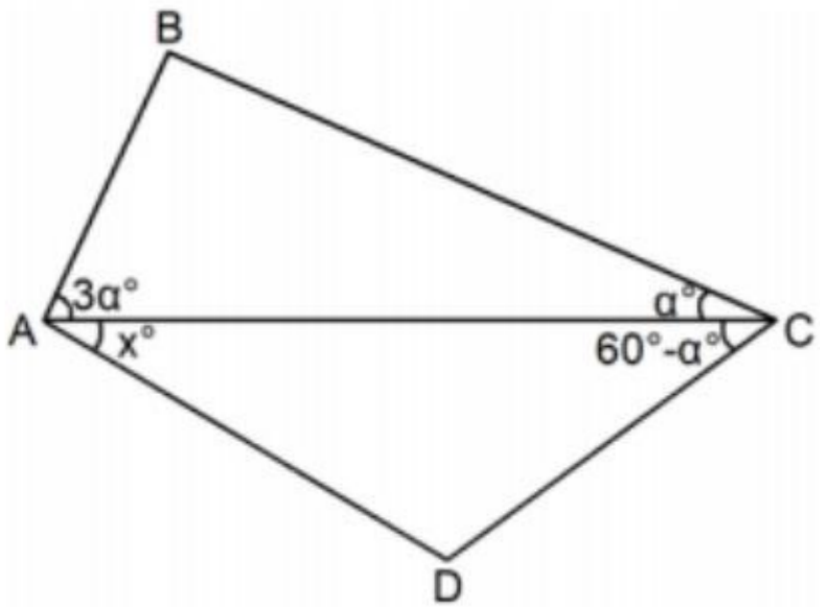
$$x < 8 \quad \ldots (2)$$

De (1) y (2): $4 < x < 8$

$$\therefore x_{máximo} = 7$$

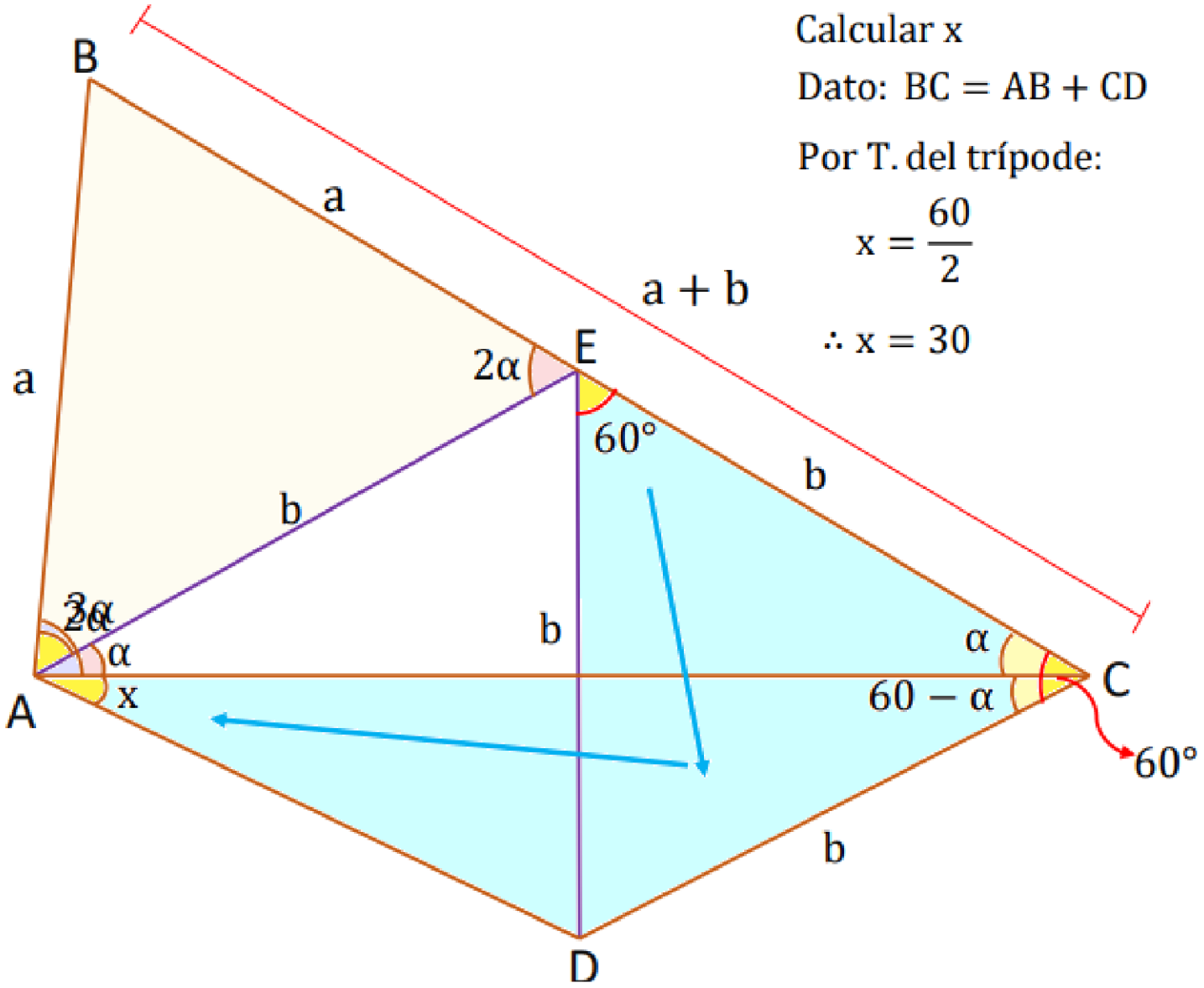
EJERCICIO

09. En la figura: BC=AB+CD, calcular el valor de x.



A) 2α
B) 3α
C) 60−α
D) 30−α
E) 30

Resolución:



Calcular x

Dato: $BC = AB + CD$

Por T. del trípode:

$$x = \frac{60}{2}$$

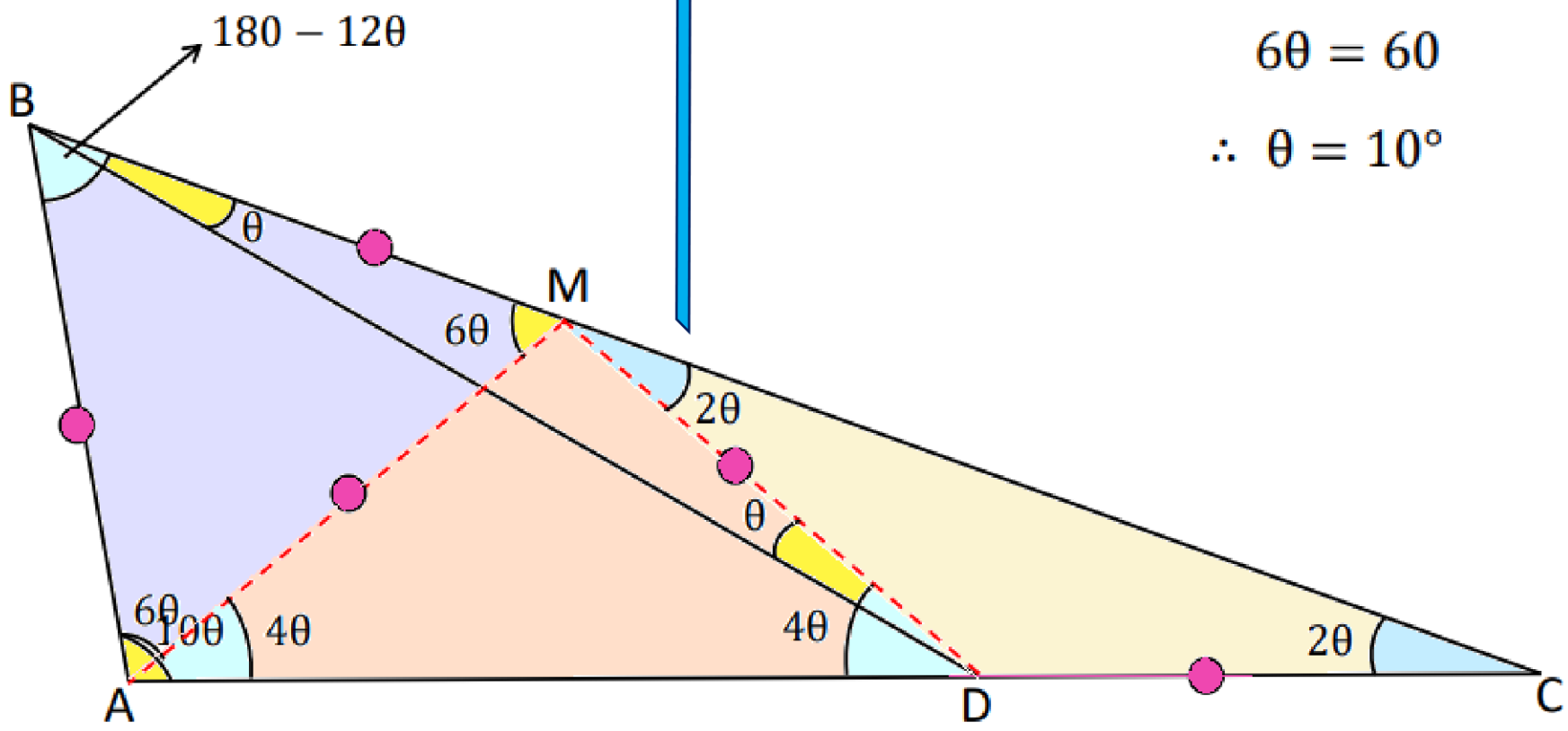
$$\therefore x = 30$$

EJERCICIO

10. Se tiene un triángulo ABC tal que la m∠A=5(m∠C). En $\overline{AC}$ se ubica el punto D tal que AB=DC y la m∠C=2(m∠DBC). Calcular m∠DBC.

A) 10
B) 12
C) 15
D) 7,5
E) 20

Resolución:



Piden θ

En ΔABM:

$$6\theta = 60$$

$$\therefore\ \theta = 10°$$

CLAVES

PARA LA CLASE

01	02	03	04	05
D	A	C	B	B

06	07	08	09	10
B	E	E	E	A

TAREA

01	02	03	04	05
B	B	B	C	B

06	07	08	09	10
C	C	D	D	B

FIN DE LA SESIÓN

PRACTICA Y APRENDERÁS